泊松分布的应用

> he_mingguo 2023-10-15

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

金融

问题引出

某保险公司新推出一项人寿保险，一共 10,000 人参加，每人每年需要缴纳保费 200 元，在这一年中，如果投保人去世，那么保险公司就需要给受益人赔偿 100,000 元。假设这类人的年死亡率为 0.001 ，求该保险公司：

- i)亏本的概率
- ii)至少获利500,000元的概率

(计算结果均保留四位小数)

> 第一直觉是，一年内的死亡人数服从二项分布$\xi\sim$ (10000,0.001)

- i)
  成本：$200\times 10,000=2,000,000$

亏本$\longleftrightarrow$死亡人数为：$2,000,000 \div 100,000 = 20$

$P(\xi \geq 20) = 1 - P(\xi \leq 20) = 1 - \sum_{k=0}^{20} \binom{n}{k} 0.001^k 0.999^{n-k} \approx 1 - 0.9980 = 0.0020$

~~敲计算器~~

- ii)
  易知，获利500,000的条件是，死亡人数≤ 15
  $P(\xi \leq 15) = \sum_{k=0}^{15} \binom{n}{k} 0.001^k 0.999^{n-k} = 0.9513$

~~也很麻烦~~

初步分析

我们发现，如果不考虑计算技巧，直接通过计算，实际计算出上面的结果是很困难的
而现实中，参加保险人数的数量可能比10，000大得多，而参保的人的死亡率亦可能比0.001低得多

事实上，我们并不苛求结果需要多么的精确，因为毕竟只是一种预测，只是希望能对未来有一个起码的预估

所以我们希望寻找一种更简便的计算方法。

在n足够大，P足够小的情况下，二项分布显然不是最优解。
在n足够大，P足够小的情况下，可以采用什么分布？$\longrightarrow$泊松分布

我们发现，本题中，$n \div P = 10,000,000$,并且，$\lambda = P \times n = 10$,大小适中

可以用泊松分布来近似求解二项分布的结果吗?
不妨试一试

近似尝试

我们假设死亡人数服从泊松分布 $\xi \sim P(\lambda)$,其中$\lambda = P \times n = 10$

计算结果表明:

$\sum_{k=0}^{20} \frac{10^k}{k!} e^{-10} \approx 0.9980$

$\sum_{k=0}^{15} \frac{10^k}{k!} e^{-10} \approx 0.9513$

保留四位小数的结果和使用二项分布的结果是一样的

也就是说，用$Possion$定理近似求得的值和使用二项分布的值相差不到万分之一

由此可见，$Possion$定理在处理二项分布近似计算方面所发挥的作用-在简化计算的同时很好地保留了精度

并且，我们由二项分布的性质$\longrightarrow E(\xi) = np, D(\xi) = np(1-p)$
可以不严谨推得泊松分布的性质$\longrightarrow E(\xi) = \lambda, D(\xi) = \lambda \qquad (1-p \to 0)$

严格证明如下：

证 设 ξ 是一随机变量,若 $E\left\{(\xi-E(\xi))^2\right\}$ 存在，则称它为 ξ 的方差,即 $D(\xi)=E\left\{(\xi-E(\xi))^2\right\}$,对于 $\xi\sim P(\lambda)$,其分布列为

$P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},(k=0,1,2,\ldots),\lambda>0$

则

$$E(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}(\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!})=\lambda$$

且

$$\begin{aligned}E(\xi^2)&=E(\xi(\xi-1))+E(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}+\lambda\\&=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!}+\lambda=\lambda^2+\lambda\end{aligned}$$

则由 $D(\xi)=E(\xi^2)-E^2(\xi)$,得

$$D(\xi)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$